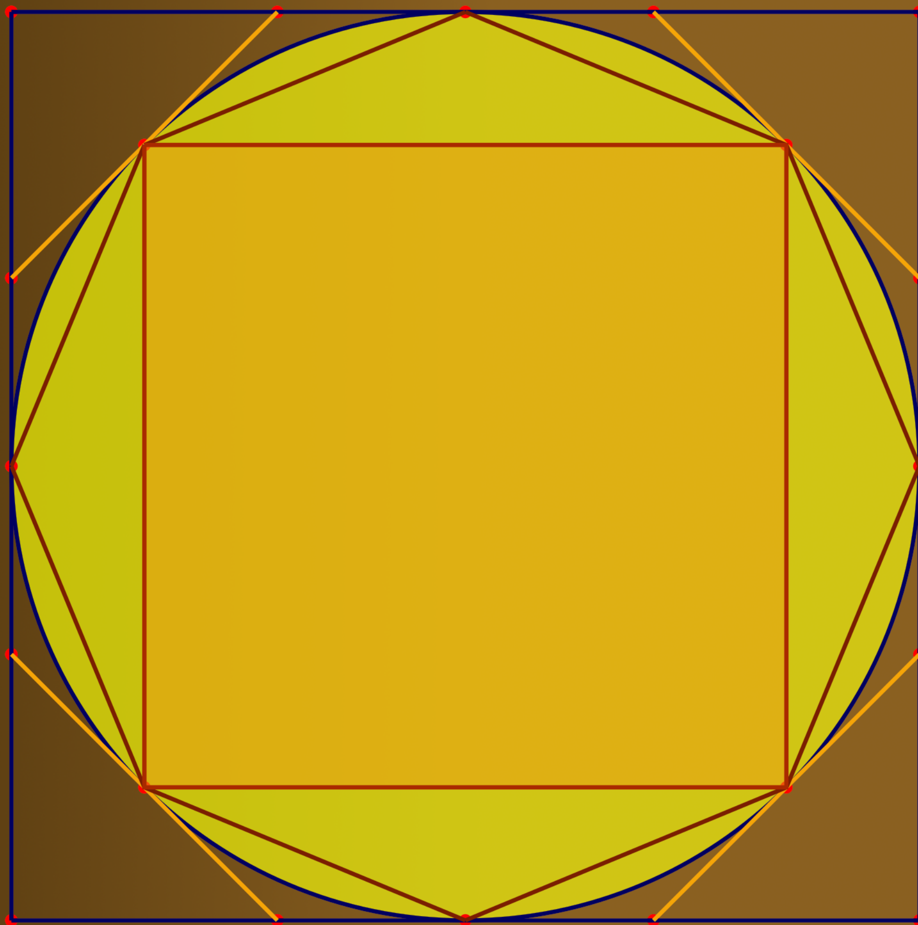
Ἀρχιμήδους



Κύκλου Μέτρησις

Α Ρ Χ Ι Μ Η Δ Ο Υ Σ

Κ Υ Κ Λ Ο Υ   Μ Ε Τ Ρ Η Σ Ι Σ

Ὑπὸ
ΝΙΚΟΛΑΟΥ Λ. ΚΕΧΡΗ
Ἀθήνα, Ἰούνιος 2018

ISBN: 978-1-387-86283-2

Πρόλογος

Τὸ 1906 ὁ Δανός φιλόλογος Johan Ludvig Heiberg ἔμαθε γιὰ τὴν ὕπαρξη ἑνός μαθηματικοῦ παλίμψηστου[1] στὴν Βιβλιοθήκη τοῦ Μετοχίου τοῦ Παναγίου Τάφου στὴν Κωνσταντινούπολη. Τὸ παλίμψηστο ἦταν μὲ τὴ μορφὴ ἑνός βιβλίου προσευχῆς ποὺ γράφτηκε τὸν δέκατο τρίτο αἰώνα. Οἱ σελίδες του καθαρίστηκαν γιὰ νὰ ἀφαιρεθοῦν τα προηγούμενα γραπτά καὶ ὁ Heiberg χρησιμοποιώντας την καλύτερη φωτογραφική και μεγεθυντική τεχνολογία τῆς ἐποχής του ἀνέλαβε τὴν πρόκληση γιὰ νὰ ἀποκρυπτογραφήσει τὴν ὑποκείμενη γραφή.

Πρὸς ἔκπληξη ὅλων, ἀποκαλύφθηκαν οἱ ἀκόλουθες ἑπτὰ Ἀρχιμήδειες πραγματεῖες:

- Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.
- Περὶ ἑλίκων.
- Κύκλου μέτρησις.
- Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν.
- Ὀχουμένων.
- Περί τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος
- Στομάχιον.

Τὸ σωζόμενον ἔργο τοῦ Ἀρχιμήδους «Κύκλου μέτρησις» περιλαμβάνει ἐν ὅλω τρία θεωρήματα. Εἰς τὸ πρῶτο ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποίου ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ἡ δὲ ἄλλη μὲ τὴν περιφέρεια αὐτοῦ.

Εἰς τὸ δεύτερο θεώρημα ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου μὲ τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνο εἶναι ἴσος μὲ 11:14.

Τέλος εἰς τὸ τρίτο θεώρημα ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρο τοῦ κύκλου π εἶναι μικρότερος τοῦ $3\frac{1}{7}$ καὶ μεγαλύτερος τοῦ $3\frac{10}{71}$.

Τὰ θεωρήματα αὐτὰ μνημονεύονται ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Μετρικὰ»[2] Γιὰ τὸ πρῶτο καὶ τὸ δεύτερο θεωρήματα τῆς παρούσης πραγματείας ὁ Ἥρων, λέγει ὅτι περιλαμβάνονται εἰς τὸ ἔργο τοῦ Ἀρχιμήδη «Κύκλου μέτρησις» ἐνῶ γιὰ τὸ τρίτο θεώρημα δὲν ἀναφέρει τοὺς ἀριθμοὺς $3\frac{1}{7}$ καὶ $3\frac{10}{71}$ ἀλλὰ ἄλλους καὶ λέγει ὅτι αὐτὸ τὸ θεώρημα περιέχεται στὸ ἔργο τοῦ Ἀρχιμήδους «Πλινθίδες καὶ κύλινδροι».

Ὁ μαθηματικὸς Πάππος εἰς τὸ ἔργον αὐτοῦ «Συναγωγὴ»[3] ἀναφέρει τὸ πρῶτο θεώρημα τῆς παρούσας πραγματείας ὡς περιεχόμενο εἰς τὸ ἔργο τοῦ Ἀρχιμήδους «Περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας».

Τέλος ὁ Διόφαντος εἰς τὸ ἔργο αὐτοῦ «Ἐπιπεδομετρικὰ»[4] λέγει ὅτι ὁ Ἀρ-

---

(1) Μὲ τὸν ὅρο παλίμψηστο περιγράφονται ἀρχαία κείμενα σὲ περγαμηνές ποὺ ἐπικαλύφθηκαν μὲ ἄλλο κείμενο ἢ εικόνα σὲ μεταγενέστερη ἐποχή γιὰ νὰ χρησιμοποιηθοῦν ξανά ὡς βάση γιὰ τὴ δημιουργία νεότερων ἔργων.

(2) Heronis Alexandrini, H. Schoene, Vol. III, σελ 66, Teubner, Λειψία 1903

(3) Pappi Alexandrini, F.Hultsch. Βερολῖνον, Πάππου Συναγωγῆς Ε, σελ 312

(4) Diophanti Alexandrini, Opera Omnia, P. Tannery, Teubneri, Vol. II, σελ 22, Λειψία

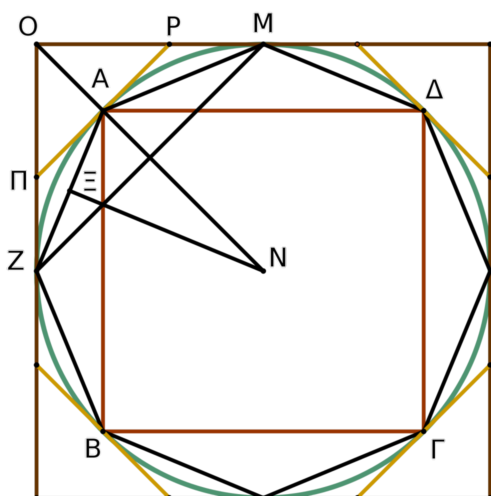
χιμήδης ἀπέδειξε ὅτι 30 ἰσόπλευρα τρίγωνα ἰσοῦνται μὲ 13 τετράγωνα.

Ἐκ τῶν μαρτυριῶν τοῦ Ἥρωνος, τοῦ Πάππου καὶ τοῦ Διόφαντου, συνάγεται ὅτι ἡ παροῦσα πραγματεία τοῦ Ἀρχιμήδους ἀποτελεῖ κάποιο μικρὸ μέρος κάποιου μεγαλύτερου τὸ ὁποῖο ἔχει ἀπολεσθεῖ. Τὴν ἄποψη αὐτὴ ἐνισχύει καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν ὑπάρχει προσφώνηση σὲ κάποιο μαθηματικὸ φίλο ὅπως ὑπάρχει στὴν ἀρχὴ καθενὸς ἀπὸ τὰ θεωρούμενα ὡς πλήρη σωζόμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους.

Αθήνα, Ἰούνιος 2018
Νικόλαος Κεχρής

α΄.

Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.



ἐχέτω ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος τριγώνῳ τῷ **Ε**, ὡς ὑπόκειται. λέγω, ὅτι ἴσος ἐστίν.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ **ΑΓ** τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ο κύκλος τοῦ τριγώνου. τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον.

εἰλήφθω κέντρον τὸ **Ν**, καὶ κάθετος ἡ **ΝΞ**. ἐλάσσων ἄρα ἡ **ΝΞ** τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. ἔστιν δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων, ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου. ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ **Ε** τριγώνου. ὅπερ ἄτοπον.



ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάττων τοῦ **Ε** τριγώνου. καί περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων.

ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΟΑΡ**. ἡ **ΟΡ** ἄρα τῆς **ΜΡ** ἐστιν μείζων· ἡ γὰρ **ΡΜ** τῇ **ΡΑ** ἴση ἐστί. καί τὸ **ΡΟΠ** τρίγωνον ἄρα τοῦ **ΟΖΑΜ** σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ.

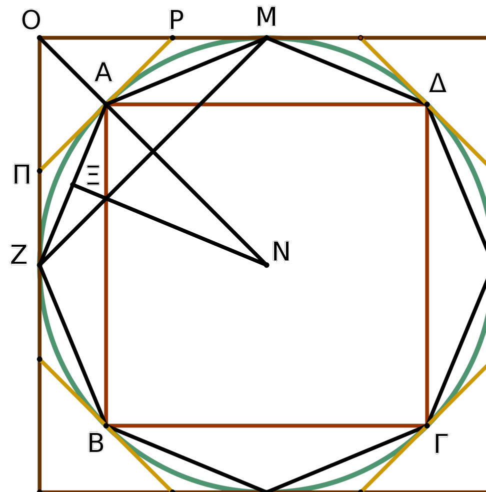
λελείφθωσαν οἱ τῷ **ΠΖΑ** τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ **Ε** τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου. ἔτι ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον τοῦ **Ε** ἐστιν ἔλασσον. ὅπερ ἄτοπον.

ἔστιν γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν **ΝΑ** ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου, ἡ δέ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως του τριγώνου. ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ **Ε** τριγώνῳ.

α′.

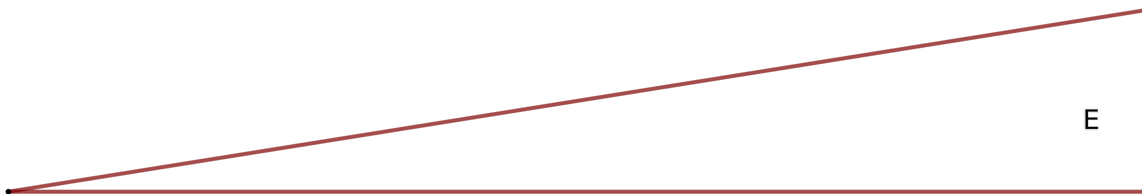
Πᾶς κύκλος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν κάθετος εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου, ἡ δὲ ἄλλη ἴση μὲ τὴν περιφέρεια του.

Ἄς ἔχει αὐτὴν τὴν σχέσιν ὁ κύκλος **ΑΒΓΔ** πρὸς τὸ τρίγωνον **Ε**, ὅπως τοῦτο φαίνεται ἀπό τὰ ὑποκείμενα σχήματα λέγω, ὅτι ὁ κύκλος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ τρίγωνον.



Διότι, ἐάν εἶναι δυνατόν, ἔστω, ὅτι ὁ κύκλος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ τριγώνου καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτόν τὸ τετράγωνον **ΑΓ**, καὶ ἂς ληφθοῦν τὰ μέσα τῶν τόξων, καὶ ἔστω ὅτι τὰ κυκλικά τμήματα εἶναι μικρότερα τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἥν ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τριγώνου.

Ἂς ληφθῇ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ **Ν** καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος **ΝΞ**. Ἄρα ἡ **ΝΞ** εἶναι μικροτέρα τῆς μιᾶς καθέτου πλευρᾶς τοῦ τριγώνου (τῆς ληφθείσης ἴσης πρὸς τὴν ἀκτῖνα). Εἶναι δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, μικροτέρα τῆς ἄλλης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, ἐπειδή εἶναι αὕτη μικροτέρα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου συνεπῶς τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ τριγώνου **Ε**· ὅπερ ἄτοπον.



Ἔστω δέ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, μικρότερος τοῦ τριγώνου **Ε** καὶ ἄς περιγραφῇ τὸ τετράγωνον, καὶ ἂς ληφθοῦν τὰ μέσα τῶν τόξων καὶ ἂς ἀχθοῦν εἰς τὰ σημεῖα διαιρέσεως τῶν τόξων ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου.

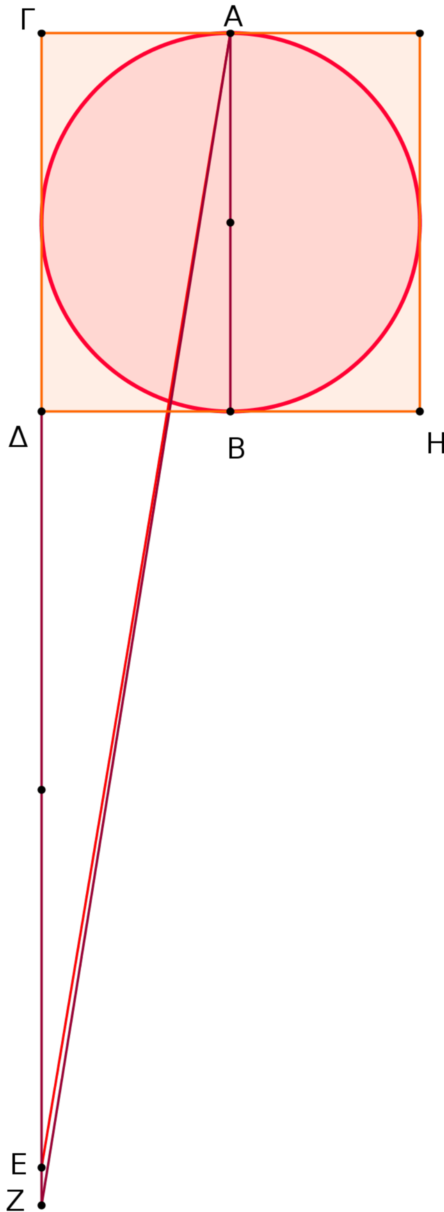
Ὀρθὴ ἄρα ἡ **ΟΑΡ**. Ἡ **ΟΡ** συνεπῶς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς **ΜΡ** διότι **ΡΜ** = **ΡΑ**· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον **ΡΟΠ** εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σχήματος **ΟΖΑΜ**.

Ἂς ὑπολειφθούν τά ὅμοια πρὸς τὸ τμῆμα **ΠΖΑ** τμήματα (διὰ συνεχοῦς διαιρέσεως τῶν τόξων) οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν να εἶναι μικρότερον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ τριγώνου **Ε** τοῦ κύκλου **ΑΒΓΔ**· θὰ εἶναι τότε τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον μικρότερον τοῦ τριγώνου **Ε**· ὅπερ ἄτοπον.

Διότι τοῦτο εἶναι μεγαλύτερον ἐπειδή ἡ **ΝΑ** εἶναι ἴση πρὸς τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἡ δέ περίμετρος (τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου) εἶναι μεγαλυτέρα τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. Ἄρα ὁ κύκλος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ τρίγωνον **Ε**.

β′.

Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ια′ πρὸς ιδ′.



ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ **ΑΒ**, καὶ περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ **ΓΗ**, καὶ τῆς **ΓΔ** διπλή ἡ **ΔΕ**, ἕβδομον δὲ ἡ **ΕΖ** τῆς **ΓΔ**.

ἐπεὶ οὖν τὸ **ΑΓΕ** πρὸς τὸ **ΑΓΔ** λόγον ἔχει, ὅν **κα**′ πρὸς **ζ**′, προς δὲ τὸ **ΑΕΖ** τό **ΑΓΔ** λόγον ἔχει, ὅν ἑπτὰ πρὸς ἕν, τὸ **ΑΓΖ** πρὸς τὸ **ΑΓΔ** ἐστιν, ὡς **κβ**′ πρὸς **ζ**′.

ἀλλὰ τοῦ **ΑΓΔ** τετραπλάσιόν ἐστι το **ΓΗ** τετράγωνον· τὸ δὲ **ΑΓΔΖ** τρίγωνον τῷ **ΑΒ** κύκλῳ ἴσον ἐστίν [ἐπεὶ ἡ μὲν **ΑΓ** κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων καὶ τῷ **ζ**′′ ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται].

ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ **ΓΗ** τετράγωνον λόγον ἔχει, ὅν **ια**′ πρὸς **ιδ**′.

β′.

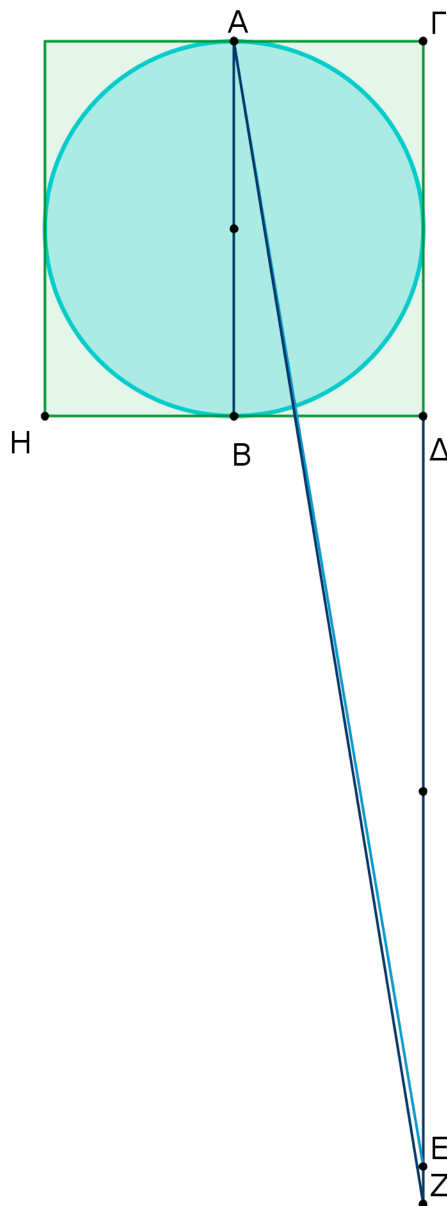
Ὁ κύκλος ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον, τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου [σχεδὸν] ὅτι λόγο ἔχει τὸ 11 πρὸς τὸ 14.

Ἔστω κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ **ΑΒ** καὶ ἂς περιγραφῇ τὸ τετράγωνον **ΓΗ** καὶ ἂς ληφΘῇ $\mathbf{ΔΕ} = 2 \cdot \mathbf{ΓΔ}$ καὶ $\mathbf{ΕΖ} = \frac{1}{7} \cdot \mathbf{ΓΔ}$.

Ἐπειδὴ λοιπόν τὸ τρίγωνον **ΑΓΕ** πρὸς τὸ τρίγωνον **ΑΓΔ** ἔχει λόγον, ὅν 21 πρός 7, τὸ δὲ τρίγωνον **ΑΓΔ** πρὸς τὸ τρίγωνον **ΑΕΖ** ἔχει λόγον, ὅν 7 πρὸς 1, τὸ τρίγωνον **ΑΓΖ** ἔχει λόγον πρὸς τὸ τρίγωνον **ΑΓΔ** ὡς τὸ 22 πρὸς 7.

Ἀλλὰ τοῦ τριγώνου **ΑΓΔ** τὸ τετράγωνον **ΓΗ** εἶναι τετραπλάσιον, τὸ δὲ τρίγωνον **ΑΓΔΖ** εἶναι ἴσον πρὸς τὸν κύκλον **ΑΒ** [ἐπειδὴ ἡ μὲν κάθετος πλευρά **ΑΓ** εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἡ δὲ βάσις ποὺ εἶναι $3\frac{1}{7}$ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, θὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι σχεδὸν ἴση τῆς περιφερείας του]·

ὁ κύκλος λοιπόν πρὸς τὸ **ΓΗ** τετράγωνον ἔχει λόγον [σχεδὸν] ὅτι ὁ 11 πρὸς τὸ 14.

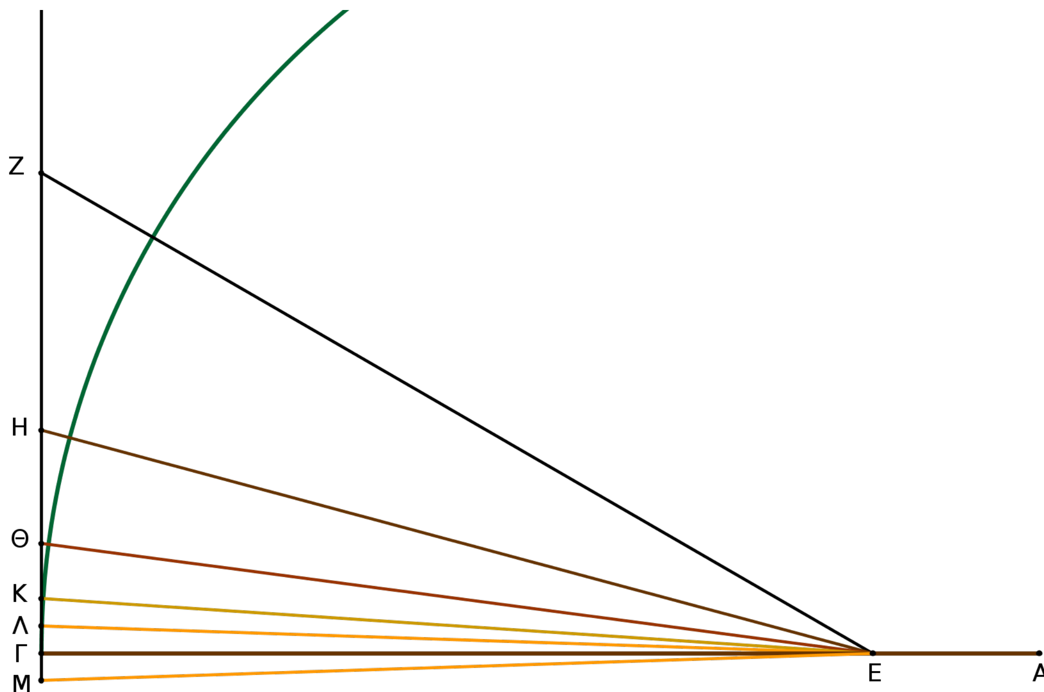


γ′.

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστί, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

ἔστω κύκλος, καί διάμετρος ἡ **ΑΓ**, καὶ κέντρον τὸ **Ε**, καὶ ἡ **ΓΛΖ** ἐφαπτομένη, καὶ ἡ ὑπὸ **ΖΕΓ** τρίτον ὀρθῆς. ἡ **ΕΖ** ἄρα πρὸς **ΖΓ** λόγον ἔχει, ὃν **τς**′ πρὸς **ρνγ**′. ἡ δὲ **ΕΓ** πρὸς τὴν **ΓΖ** λόγον ἔχει, ὃν **σξε**′ πρὸς **ρνγ**′.

τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ **ΖΕΓ** δίχα τῇ **ΕΗ**. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ **ΖΕ** πρὸς **ΕΓ**, ἡ **ΖΗ** πρὸς **ΗΓ** [καί ἐναλλὰξ καί συνθέντι]. ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ **ΖΕ**, **ΕΓ** πρὸς **ΖΓ**, ἡ **ΕΓ** πρὸς **ΓΗ**. ὥστε ἡ **ΓΕ** πρὸς **ΓΗ** μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ **φοα**′ πρὸς **ρνγ**′. ἡ **ΕΗ** ἄρα πρὸς **ΗΓ** δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$**,θυν**′ πρὸς $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$**,γυθ**′. μήκει ἄρα, ὃν **φϟα**′**η**″ πρὸς **ρνγ**′.



πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ **ΗΕΓ** τῇ **ΕΘ**. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ **ΕΓ** πρὸς **ΓΘ** μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν **,αρξβ**′**η**″ πρὸς **ρνγ**′. ἡ **ΘΕ** ἄρα πρὸς **ΘΓ** μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν **,αροβ**′**η**″ πρὸς **ρνγ**′.

ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ **ΘΕΓ** τῇ **ΕΚ**. ἡ **ΕΓ** ἄρα πρὸς **ΓΚ** μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν **,βτλδ**′**δ**″ πρὸς **ρνγ**′. ἡ **ΕΚ** ἄρα πρὸς **ΓΚ** μείζονα, ἢ ὃν **,βτλθ**′**δ**″ πρὸς **ρνγ**′.

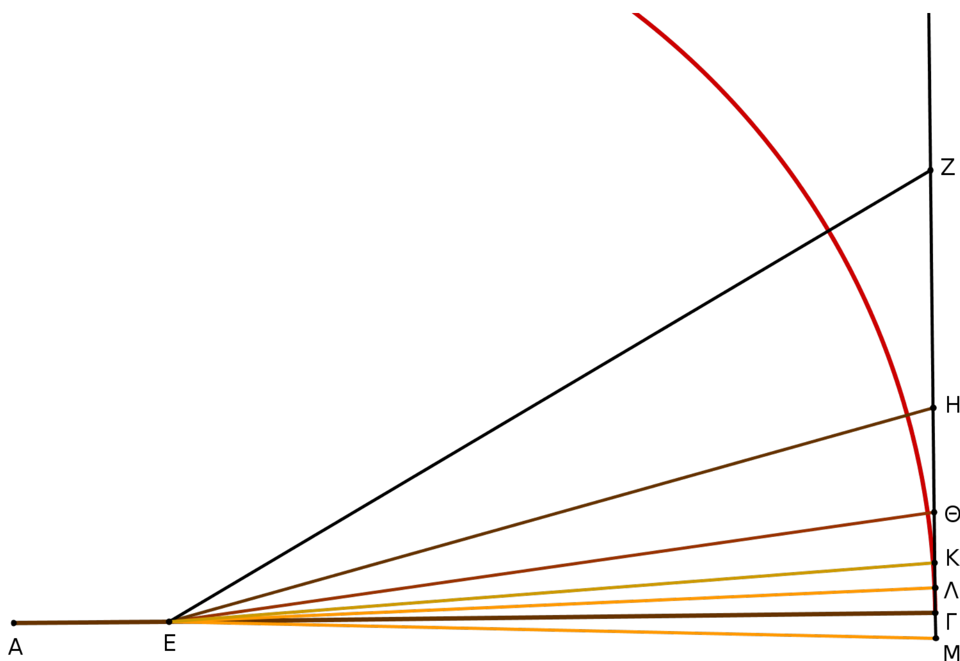
ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ **ΚΕΓ** τῇ **ΛΕ**. ἡ **ΕΓ** ἄρα πρὸς **ΛΓ** μείζονα [μήκει] λόγον ἔχει, ἤπερ **δχογ**′**ι**″ πρός **ρνγ**′.

γ΄.

Παντὸς κύκλου ἡ περιφέρεια εἶναι ὀλίγον μικρότερα μὲν τοῦ $3\frac{1}{7}$ τῆς διαμέτρου, ὀλίγον μεγαλυτέρα δὲ τοῦ $3\frac{10}{71}$ αὐτῆς.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ **ΑΓ** καὶ κέντρον τὸ **Ε** καὶ ἡ **ΓΛΖ** ἐφαπτομένη καὶ ἡ γωνία **ΖΕΓ** ἴση πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ ὀρθῆς· ἄρα ἡ **ΕΖ** : **ΖΓ** $= 306 : 153$, ἡ δὲ **ΕΓ** : **ΓΖ** $= 265 : 153$.

Ἂς διχοτομηθῇ λοιπὸν ἡ **ΖΕΓ** διὰ τῆς **ΕΗ**· θα εἶναι τότε **ΖΕ** : **ΕΓ** = **ΖΗ** : **ΗΓ** [καὶ δι᾽ ἐναλλαγῆς καὶ συνθέσεως] ἄρα (**ΖΕ** + **ΕΓ**) : **ΖΓ** = **ΕΓ** : **ΓΗ**· ὥστε ὁ λόγος **ΓΕ** : **ΓΗ** εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου $571 : 153$. Ἄρα **ΕΗ**^{2} : **ΗΓ**^{2} > $349450 : 23409$ ὁπότε γιὰ τὶς τετραγωνικὲς ρίζες θὰ ἰσχύει παρόμοια **ΕΗ** : **ΗΓ** > $591\frac{1}{8} : 153$.



Ἂς διχοτομηθῇ πάλιν ἡ γωνία **ΗΕΓ** ὑπὸ τῆς **ΕΘ**· διὰ τὴν αὐτήν αἰτίαν ὁ λόγος **ΕΓ** : **ΓΘ** εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λόγου $1162\frac{1}{8} : 153$ ἄρα **ΘΕ** : **ΘΓ** > $1172\frac{1}{8} : 153$.

Ἂς διχοτομηθῇ ἀκόμη ἡ γωνία **ΘΕΓ** διὰ τῆς **ΕΚ**· τότε **ΕΓ** : **ΓΚ** > $2334\frac{1}{4} : 153$ ἄρα **ΕΚ** : **ΓΚ** > $2339\frac{1}{4} : 153$·

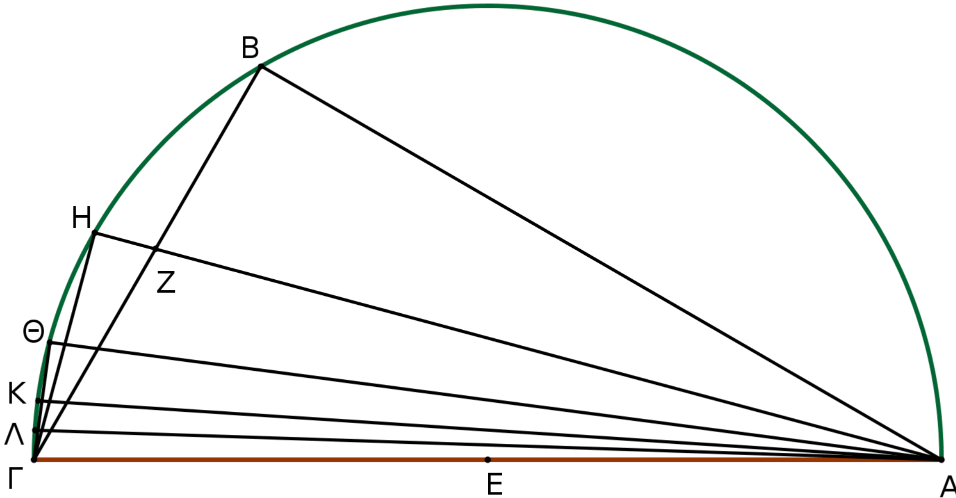
Ἂς διχοτομηθῇ ἀκόμη ἡ γωνία **ΚΕΓ** διὰ τῆς **ΛΕ**· τότε **ΕΓ** : **ΛΓ** > $4673\frac{1}{2} : 153$.

ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ **ΖΕΓ** τρίτον οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ή ὑπὸ **ΛΕΓ** ὀρθῆς ἐστι **μη**΄΄.

κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση πρὸς τῷ **Ε** ἡ ὑπό **ΓΕΜ** ἡ ἄρα ὑπό **ΛΕΜ** ὀρθῆς ἐστι **κδ**΄΄. καί ἡ **ΛΜ** ἄρα εὐθεῖα τοῦ περὶ τὸν κύκλον ἐστὶ πολυγώνου πλευρὰ πλευρὰς ἔχοντος **ϟς**΄.

ἐπεὶ οὖν ἡ **ΕΓ** πρὸς τὴν **ΓΛ** ἐδείχθη μείζονα λόγον ἔχουσα, ἤπερ ͵**δχογ**΄**ι**΄΄ πρός **ρνγ**΄, ἀλλὰ τῆς μὲν **ΕΓ** διπλῆ ἡ **ΑΓ**, τῆς δὲ **ΓΔ** διπλασίων ἡ **ΛΜ**, καὶ ἡ **ΑΓ** ἄρα πρὸς τὴν τοῦ **ϟς**΄ πολυγώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵**δχογ**΄**ι**΄΄ πρός $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$͵**δχπη**΄. καί ἐστιν τριπλασία, καὶ ὑπερέχουσιν **χξζ**΄**ι**΄΄, ἅπερ τῶν ͵**δχογ**΄**ι**΄΄ ἐλάττονά ἐστιν ἢ τὸ ἕβδομον.

ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον καὶ ἐλάττονι ἢ τῷ ἐβδόμῳ μέρει μεῖζον. ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.



ἔστω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ **ΑΓ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΒΑΓ** τρίτον ὀρθῆς. ἡ **ΑΒ** ἄρα πρὸς **ΒΓ** ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵**ατνα**΄ πρὸς **ψπ**΄ [ἡ δὲ **ΑΓ** πρὸς **ΓΒ**, ὃν ͵**αφξ**΄ πρὸς **ψπ**΄].

δίχα ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ **ΑΗ**. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΑΗ** τῇ ὑπὸ **ΗΓΒ**, ἀλλὰ καί τῇ ὑπὸ **ΗΑΓ**, καὶ ἡ ὑπὸ **ΗΓΒ** τῇ ὑπὸ **ΗΑΓ** ἐστιν ἴση. καί κοινή ἡ ὑπὸ **ΑΗΓ** ὀρθή. καί τρίτη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΗΖΓ** τρίτῃ τῇ ὑπὸ **ΑΓΗ** ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ **ΑΗΓ** τῷ **ΓΗΖ** τριγώνῳ.

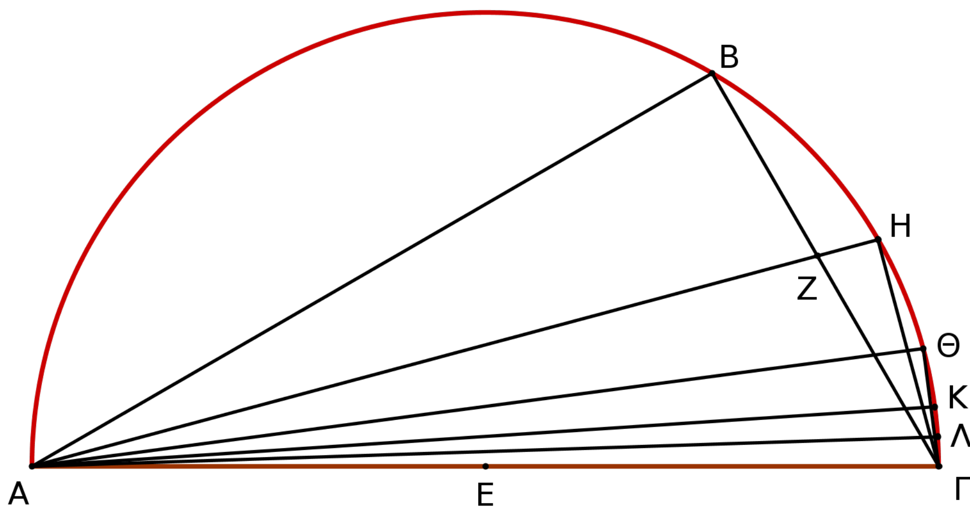
ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ **ΑΗ** πρὸς **ΗΓ**, ἡ **ΓΗ** πρὸς **ΗΖ**, καί ἡ **ΑΓ** πρὸς **ΓΖ**. ἀλλ' ὡς ἡ **ΑΓ** πρὸς **ΓΖ**, καί συναμφότερος ἡ **ΓΑΒ** πρὸς **ΒΓ**. καί ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ **ΒΑΓ** πρὸς **ΒΓ**, ἡ **ΑΗ** πρὸς **ΗΓ**. διὰ τοῦτο οὖν ἡ **ΑΗ** πρὸς τήν **ΗΓ** ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ **;βϡια**΄ πρὸς **ψπ**΄, ἡ δὲ **ΑΓ** πρὸς τὴν **ΓΗ** ἐλάσσονα, ἢ ὃν ͵**γιγ**΄**ι**΄΄**δ**΄΄ πρὸς **ψπ**΄.

Ἐπειδή λοιπὸν ἡ γωνία **ΖΕΓ** ἡ ὁποία εἶναι τὸ ἕν τρίτον ὀρθῆς, ἐδιχοτομήθη τετράκις, ἡ γωνία **ΛΕΓ** θα εἶναι τὸ $1/48$ ὀρθῆς.

Ἄς ληφθῇ ἡ γωνία **ΜΕΓ** $=$ **ΛΕΓ** τότε ἡ γωνία **ΛΕΜ** θα εἶναι τὸ $1/24$ ὀρθῆς· συνεπῶς ἡ εὐθεία **ΛΜ** θα εἶναι πλευρά τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ ἔχοντος 96 πλευράς.

Ἐπειδή λοιπὸν ἐδείχθη ὅτι **ΕΓ** : **ΓΛ** > $4673\frac{1}{2} : 153$, ἀλλὰ **ΑΓ** $= 2 \cdot$ **ΕΓ** καὶ **ΛΜ** $= 2 \cdot$ **ΓΛ** συνάγεται, ὅτι **ΑΓ** : περίμετρον 96γώνου > $4673\frac{1}{2} : 14688$. καὶ ἀντιστρόφως τὸ $14688 : 4673\frac{1}{2}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $3\frac{1}{7}$ (τὸ ὁποῖον ἰσοῦται με $14688 : 4672\frac{1}{2}$)

ὥστε τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον (ἡ περίμετρος τούτου) εἶναι τριπλάσιον καὶ ὑπερέχον προσέτι κατὰ διάστημα μικρότερον τοῦ ἑνός ἑβδόμου τῆς διαμέτρου· ἄρα καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου κατά μείζονα λόγον θὰ εἶναι μικροτέρα ἢ τριπλασία καὶ ὑπερέχουσα ἐπί πλέον κατὰ τό ἕβδομον μέρος (θά εἶναι δηλ. μικροτέρα τοῦ $3\frac{1}{7}$).



Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ **ΑΓ**, ἡ δὲ γωνία **ΒΑΓ**, ἔστω ἕν τρίτον ὀρθῆς· ἄρα ἡ **ΑΒ** ἔχει λόγον πρὸς τὴν **ΒΓ** μικρότερον τοῦ λόγου τόν ὁποῖον ἔχει ὁ ἀριθμός 1351 πρὸς τόν αριθμόν 780 [ἡ δὲ **ΑΓ** : **ΓΒ** $= 1560 : 780$].

Διὰ τῆς **ΑΗ** διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν **ΒΑΓ**· ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία **ΒΑΗ** εἶναι ἴση πρὸς την γωνίαν **ΗΓΒ** ἀλλὰ καὶ τὴν γωνίαν **ΗΑΓ** ἕπεται ὅτι καὶ ἡ **ΗΓΒ** γωνία εἶναι ἴση πρὸς την **ΗΑΓ** γωνίαν, καὶ κοινὴ ἡ ὀρθὴ γωνία **ΑΗΓ** ἄρα καὶ ἡ τρίτη γωνία **ΗΖΓ** εἶναι ἴση πρὸς την τρίτην γωνίαν **ΑΓΗ**· ἄρα τὰ τρίγωνα **ΑΗΓ** καὶ **ΓΗΖ** εἶναι ἰσογώνια.

Συνεπώς (ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ἰσογωνίων τριγώνων **ΗΓΖ** καὶ **ΗΓΑ**) ἕπεται **ΑΗ** : **ΗΓ** $=$ **ΓΗ** : **ΗΖ** $=$ **ΑΓ** : **ΓΖ**. Ἀλλά **ΑΓ** : **ΓΖ** $=$ (**ΓΑ** $+$ **ΑΒ**) : **ΒΓ** ἄρα καὶ (**ΓΑ** $+$ **ΑΒ**) : **ΒΓ** $=$ **ΑΗ** : **ΗΓ**. Διὰ τοῦτο λοιπὸν ἡ **ΑΗ** : **ΗΓ** < $2911 : 780$, ἡ δὲ **ΑΓ** : **ΓΗ** < $3013\frac{3}{4} : 780$.

δίχα ἡ ὑπὸ **ΓΑΗ** τῇ **ΑΘ**. ἡ **ΑΘ** ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν **ΘΓ** ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν **;εϡκδ´ι´´δ´´** πρὸς **ψπ´**, ἢ ὃν ͵**αωκγ´** πρὸς **σμ´**. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας **δ´ιγ´´**. ὥστε ἡ **ΑΓ** πρὸς τὴν **ΓΘ**, ἢ ὃν ͵**αωλη´θ´ια´´** πρός **σμ´**.

ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ **ΘΑΓ** τῇ **ΚΑ**. καί ἡ **ΑΚ** πρὸς τήν **ΚΓ** ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵**αζ´** πρὸς **ξς´**. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας **ια´μ´´**. ἡ **ΑΓ** ἄρα πρὸς τήν **ΓΚ**, ἢ ὃν ͵**αθ´ς´´** πρὸς **ξς´**.

ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ **ΚΑΓ** τῇ **ΛΑ**. ἡ **ΑΛ** ἄρα πρὸς τὴν **ΛΓ** ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν τὰ ͵**βις´ς´´** πρὸς **ξς´**, ἡ δὲ **ΑΓ** πρὸς **ΓΛ** ἐλάσσονα, ἢ τὰ ͵**βιζ´δ´´** πρὸς **ξς´**. ἀνάπαλιν ἄρα ή περίμετρος τοῦ πολυχώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵**ςτλς´** πρὸς ͵**βιζ´δ´´**, ἅπερ τῶν ͵**βιζ´δ´´** μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καί δέκα **οα´´**. καί ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ **ϟς´** πολυχώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ **ι´οα´´**. ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ **ι´οα´´**.

ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ **ι´οα´´** μείζων.

Ἂς διχοτομηθῇ ἡ γωνία **ΓΑΗ** διὰ τῆς **ΑΘ**· Διὰ τούς αὐτοὺς ὡς ἄνω λόγους ἄρα **ΑΘ** : **ΘΓ** < $5924\frac{3}{4} : 780$ ἢ **ΑΘ** : **ΘΓ** < $1823 : 240$· διότι οἱ ἀριθμοί 1823 καὶ 240 εἶναι τὰ $\frac{4}{13}$ ἀντιστοίχως, τῶν ἀριθμών $5924\frac{3}{4}$ καὶ 780· ὥστε **ΑΓ** : **ΓΘ** < $1838\frac{9}{11} : 240$·

ἀκόμη ἂς διχοτομηθῇ ἡ γωνία **ΘΑΓ** διὰ τῆς **ΚΑ**· τότε **ΑΚ** : **ΚΓ** < $1007 : 66$ διότι οἱ ἀριθμοί 1007 καὶ 65 εἶναι τὰ $\frac{11}{40}$ ἀντιστοίχως τῶν ἀριθμῶν $3661\frac{9}{11}$ καὶ 240· ἄρα ἡ **ΑΓ** : **ΚΓ** < 1OO9$\frac{1}{6} : 66$.

Ἂς διχοτομηθῇ ἀκόμη ἡ γωνία **ΚΑΓ** ὑπὸ τῆς **ΛΑ**· ἄρα **ΑΛ** : **ΛΓ** < $2016\frac{1}{6} : 66$ καὶ **ΑΓ** : **ΓΛ** < $2017\frac{1}{4} : 66$· καὶ δι' ἀντιστροφῆς τῶν ἀνισοτήτων (π.χ. **ΓΛ** : **ΑΓ** > $66 : 2017\frac{1}{4}$) συνάγεται, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ (ἐγγεγραμμένου) πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου ἔχει λόγον > $6336 : 2017\frac{1}{4}$, ὅστις λόγος ($6336 : 2017\frac{1}{4}$) εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $3\frac{10}{71}$.

Ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ 96γώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον πρὸς διάμετρον > $3\frac{10}{71}$· ὥστε κατά μείζονα λόγον, ἡ περιφερεια τοῦ κύκλου (μεγαλυτέρα οὖσα τῆς περιμέτρου τοῦ 96γώνου) εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ $3\frac{10}{71}$.

Ἄρα ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶναι μικρότερα μὲν τοῦ $3\frac{1}{7}$ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ, μεγαλυτέρα δὲ τοῦ $3\frac{10}{71}$ αὐτῆς.

Σχόλια γιὰ τὸ θεώρημα α′. Μὲ σύγχρονο συμβολισμό, ἐὰν

Κ δηλώνει τὸ ἐμβαδὸ κύκλου ἀκτῖνος **ρ**
Π δηλώνει τὴν περιφέρειά του
Ε δηλώνει τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου πλευρῶν **ρ**, **Π**

θὰ πρέπει νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι $\mathbf{K} = \mathbf{E}$.
1) $\mathbf{K} > \mathbf{E}$: Συνεπάγεται τότε $\mathbf{K} = \mathbf{E} + \mathbf{\Delta}$. Θεωροῦμε ἐγγεγραμμένο κανονικὸ ν-γωνο ἐμβαδοῦ $\mathbf{P}_\nu$ τέτοιου ὥστε $\mathbf{K} - \mathbf{P}_\nu < \mathbf{\Delta}$. Θὰ εἶναι τότε

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{K} - \mathbf{P}_\nu < \mathbf{\Delta} \\ \mathbf{P}_\nu < \mathbf{E}\end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{K} < \mathbf{P}_\nu + \mathbf{\Delta} < \mathbf{E} + \mathbf{\Delta} \quad \text{ἄτοπο}$$

2) $\mathbf{K} < \mathbf{E}$: Συνεπάγεται τότε $\mathbf{E} = \mathbf{K} + \mathbf{\Delta}$. Θεωροῦμε περιγεγραμμένο κανονικὸ ν-γωνο ἐμβαδοῦ $\mathbf{R}_\nu$ τέτοιου ὥστε $\mathbf{R}_\nu - \mathbf{K} < \mathbf{\Delta}$. Θὰ εἶναι τότε

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{R}_\nu - \mathbf{K} < \mathbf{\Delta} \\ \mathbf{R}_\nu > \mathbf{E}\end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{K} > \mathbf{R}_\nu - \mathbf{\Delta} > \mathbf{E} - \mathbf{\Delta} \quad \text{ἄτοπο}$$

Σχόλια γιὰ τὸ θεώρημα γ′. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἀπόδειξη τοῦ **γ**′ θεωρήματος ἔχουν παραλειφθεῖ ἀρκετοὶ ὑπολογισμοὶ ποὺ εἶναι φυσικὸ νὰ δημιουργοῦν ἐρωτήματα στὸν ἀναγνώστη, θὰ σκιαγραφήσουμε καὶ θὰ παρουσιάσουμε τὸ θεώρημα αὐτὸ σὲ σύγχρονη μορφὴ καὶ τρόπο ἀναλυτικὸ ἔτσι ὥστε νὰ γίνει καλύτερα κατανοητό.

Ἡ ἀπόδειξη ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη. Στὸ πρῶτο μέρος ὁ Ἀρχιμήδης ἐπιχειρεῖ τὴν προσέγγιση τοῦ λόγου τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρό του μὲ περιγεγραμμένα κανονικὰ πολύγωνα, ἐνῶ στὸ δεύτερο μὲ ἐγγεγραμμένα.

Ἡ ἀπόδειξη στὸ πρῶτο μέρος ξεκινᾶ ἀπὸ μιὰ προσέγγιση κατ'ἔλλειψη τοῦ $\sqrt{3}$ μὲ τὸ κλάσμα $\frac{265}{153}$, ἐνῶ στὸ δεύτερο, ξεκινᾶ μὲ μιὰ προσέγγιση κατ'ὑπεροχὴ τοῦ $\sqrt{3}$ μὲ τὸ κλάσμα $\frac{1351}{780}$.

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

Πῶς ἔφθασε ὁ Ἀρχιμήδης σὲ αὐτὴ τὴν προσέγγιση τοῦ $\sqrt{3}$ δὲν εἶναι βέβαιο, εἶναι ἀρκετὰ πιθανὸν ὅμως νὰ κατέληξε σὲ αὐτὰ ἐφαρμόζοντας τὸν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη γιὰ τὴν εὕρεση κοινοῦ μέτρου μεγεθῶν ἴσων μὲ $\sqrt{3}$ καὶ 1. Μὲ σημερινὴ ὁρολογία, κατέληξε σὲ αὐτὰ τὰ κλάσματα μέσω τῆς θεωρίας τῶν συνεχῶν κλασμάτων. Πιὸ συγκεκριμένα, ἡ ἀνάλυση τοῦ $\sqrt{3}$ σὲ συνεχὲς κλάσμα εἶναι ἡ ἀκόλουθη

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

ἢ μὲ ἄλλο συμβολισμὸ $\sqrt{3} = 1:[1,2]$ ποὺ εἶναι ἡ βάση γιὰ νὰ κατασκευάσουμε τὸν ἀκόλουθο πίνακα

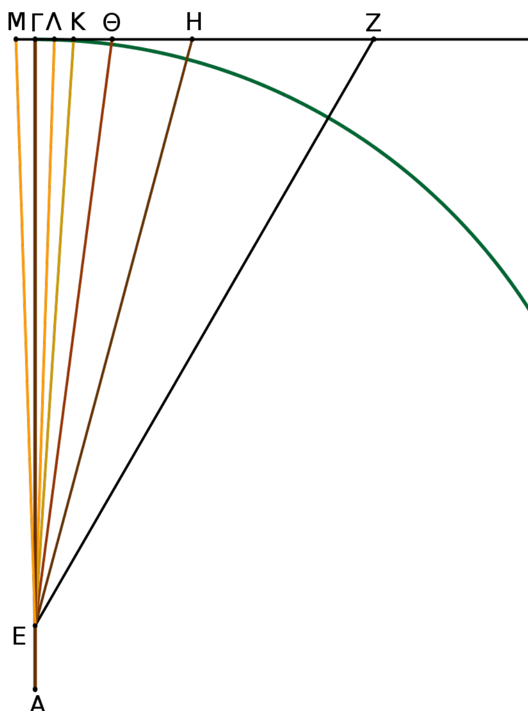
n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n			1	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2
r_n	0	1	1	2	5	7	19	26	71	97	265	362	989	1351
s_n	1	0	1	1	3	4	11	15	41	56	153	209	571	780

ὅπου

$$r_n = a_n \cdot r_{n-1} + r_{n-2}$$
$$s_n = a_n \cdot s_{n-1} + s_{n-2}$$

καὶ ἀρχικές συνθῆκες $r_{-1} = 0$, $r_0 = 1$, $s_{-1} = 1$ καὶ $s_0 = 0$.

Ἂν καὶ ἡ μέθοδος τῶν συνεχῶν κλασμάτων προσφέρει ἱκανοποιητικὴ ἐξήγηση γιὰ τὸ πῶς ἔφθασε ὁ Ἀρχιμήδης στὰ φράγματα τοῦ $\sqrt{3}$, ἀποτυγχάνει ἐν τούτοις νὰ ἑρμηνεύσει τὴν παραγωγὴ τῶν φραγμάτων κατὰ τὴν ἐξαγωγὴ ριζῶν στὸ τέλος κάθε βήματος ποὺ θὰ δοῦμε ἐν συνεχεία. Μία τέτοια μέθοδος δὲν ἔχει βρεθεῖ [2] καὶ ἀποτελεῖ μέχρι σήμερα ἀντικείμενο ἔρευνας.



Μέρος 1ο. Ὑπολογίζονται διαδοχικὰ οἱ λόγοι:

$$\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}}, \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{\Gamma Z}} \quad \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma H}}, \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{\Gamma H}} \quad \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma \Theta}}, \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{\Gamma \Theta}} \quad \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma K}}, \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{\Gamma K}}$$

Βῆμα 1ο. Θεωροῦμε τὴν πλευρὰ **ΓΖ** ὡς τὸ ἥμισυ πλευρᾶς κανονικοῦ ἑξαγώνου περιγεγραμμένου σὲ κύκλο μὲ ἀκτῖνα **ΕΓ**.

$$\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}} = \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$
$$\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{\Gamma Z}} = \frac{2}{1} = \frac{306}{153}$$

(2) E. B. Davies, Archimedes' calculations of square roots

Βῆμα 2º. Θεωροῦμε τὴν πλευρὰ **ΓΗ** ὡς τὸ ἥμισυ πλευρᾶς κανονικοῦ δωδεκαγώνου περιγεγραμμένου σὲ κύκλο μὲ ἀκτῖνα **ΕΓ** καὶ διάμετρο **δ**.

ἐπειδὴ ἀπὸ θεώρημα διχοτὸμων

$$\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{E\Gamma}} = \frac{\mathrm{ZH}}{\mathrm{\Gamma H}} \rightarrow \frac{\mathrm{EZ}+\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{E\Gamma}} = \frac{\mathrm{ZH}+\mathrm{\Gamma H}}{\mathrm{\Gamma H}} \rightarrow \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma H}} = \frac{\mathrm{EZ}+\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{ZH}+\mathrm{\Gamma H}} \rightarrow \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma H}} = \frac{\mathrm{EZ}+\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}}$$

θὰ εἶναι

$$\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma H}} = \frac{\mathrm{EZ}+\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{\Gamma Z}} + \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}} > \frac{265}{153} + \frac{306}{153} = \frac{571}{153}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\mathrm{EH}^2 = \mathrm{\Gamma H}^2 + \mathrm{E\Gamma}^2 \rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{EH}^2}{\mathrm{\Gamma H}^2} = 1 + \frac{\mathrm{E\Gamma}^2}{\mathrm{\Gamma H}^2}$$

$$> \left(\frac{571}{153}\right)^2 + 1 = \frac{349450}{26569} \rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{\Gamma H}} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}$$

Βῆμα 3º. Θεωροῦμε τὴν πλευρὰ **ΓΘ** ὡς τὸ ἥμισυ πλευρᾶς κανονικοῦ 24-γώνου περιγεγραμμένου σὲ κύκλο μὲ ἀκτῖνα **ΕΓ** καὶ διάμετρο **δ**.

ἐπειδὴ ἀπὸ θεώρημα διχοτὸμων

$$\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{E\Gamma}} = \frac{\mathrm{H\Theta}}{\mathrm{\Gamma\Theta}} \rightarrow \frac{\mathrm{EH}+\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{E\Gamma}} = \frac{\mathrm{H\Theta}+\mathrm{\Gamma\Theta}}{\mathrm{\Gamma\Theta}} \rightarrow \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Theta}} = \frac{\mathrm{EH}+\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{H\Theta}+\mathrm{\Gamma\Theta}} \rightarrow \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Theta}} = \frac{\mathrm{EH}+\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma H}}$$

θὰ εἶναι

$$\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Theta}} = \frac{\mathrm{EH}+\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma H}} = \frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{\Gamma H}} + \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma H}} > \frac{591\frac{1}{8}}{153} + \frac{571}{153} = \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\mathrm{E\Theta}^2 = \mathrm{\Gamma\Theta}^2 + \mathrm{E\Gamma}^2 \rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{E\Theta}^2}{\mathrm{\Gamma\Theta}^2} = 1 + \frac{\mathrm{E\Gamma}^2}{\mathrm{\Gamma\Theta}^2}$$

$$> \left(\frac{1162\frac{1}{8}}{153}\right)^2 + 1 = \frac{1373943\frac{33}{64}}{23409} \rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{E\Theta}}{\mathrm{\Gamma\Theta}} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}$$

Βῆμα 4º. Θεωροῦμε τὴν πλευρὰ **ΓΚ** ὡς τὸ ἥμισυ πλευρᾶς κανονικοῦ 48-γώνου περιγεγραμμένου σὲ κύκλο μὲ ἀκτῖνα **ΕΓ** καὶ διάμετρο **δ**.

ἐπειδὴ ἀπὸ θεώρημα διχοτὸμων

$$\frac{\mathsf{E\Theta}}{\mathsf{E\Gamma}} = \frac{\mathsf{\Theta K}}{\mathsf{\Gamma K}} \rightarrow \frac{\mathsf{E\Theta}+\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{E\Gamma}} = \frac{\mathsf{\Theta K}+\mathsf{\Gamma K}}{\mathsf{\Gamma K}} \rightarrow \frac{\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{\Gamma K}} = \frac{\mathsf{E\Theta}+\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{\Theta K}+\mathsf{\Gamma K}} \rightarrow \frac{\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{\Gamma K}} = \frac{\mathsf{E\Theta}+\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{\Gamma\Theta}}$$

θὰ εἶναι

$$\frac{\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{\Gamma K}} = \frac{\mathsf{E\Theta}+\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{\Gamma\Theta}} = \frac{\mathsf{E\Theta}}{\mathsf{\Gamma\Theta}} + \frac{\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{\Gamma\Theta}} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153} + \frac{1162\frac{1}{8}}{153} = \frac{2334\frac{1}{4}}{153}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\mathsf{EK}^2 = \mathsf{\Gamma K}^2 + \mathsf{E\Gamma}^2 \rightarrow$$

$$\frac{\mathsf{EK}^2}{\mathsf{\Gamma K}^2} = 1 + \frac{\mathsf{E\Gamma}^2}{\mathsf{\Gamma K}^2}$$

$$> \left(\frac{2334\frac{1}{4}}{153}\right)^2 + 1 = \frac{5472132\frac{1}{16}}{23409} \rightarrow$$

$$\frac{\mathsf{EK}}{\mathsf{\Gamma K}} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}$$

Βῆμα 5º. Θεωροῦμε τὴν πλευρὰ **ΓΛ** ὡς τὸ ἥμισυ πλευρᾶς κανονικοῦ 96-γώνου περιγεγραμμένου σὲ κύκλο μὲ ἀκτῖνα **ΕΓ** καὶ διάμετρο **δ**.

ἐπειδὴ ἀπὸ θεώρημα διχοτὸμων

$$\frac{\mathsf{EK}}{\mathsf{E\Gamma}} = \frac{\mathsf{K\Lambda}}{\mathsf{\Gamma\Lambda}} \rightarrow \frac{\mathsf{EK}+\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{E\Gamma}} = \frac{\mathsf{K\Lambda}+\mathsf{\Gamma\Lambda}}{\mathsf{\Gamma\Lambda}} \rightarrow \frac{\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{\Gamma\Lambda}} = \frac{\mathsf{EK}+\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{K\Lambda}+\mathsf{\Gamma\Lambda}} \rightarrow \frac{\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{\Gamma\Lambda}} = \frac{\mathsf{EK}+\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{\Gamma K}}$$

θὰ εἶναι

$$\frac{\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{\Gamma\Lambda}} = \frac{\mathsf{EK}+\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{\Gamma K}} = \frac{\mathsf{EK}}{\mathsf{\Gamma K}} + \frac{\mathsf{E\Gamma}}{\mathsf{\Gamma K}} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153} + \frac{2334\frac{1}{4}}{153} = \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

καὶ ἐπειδὴ

...

ἐδῶ ὁ Ἀρχιμήδης σταματᾶ αὐτὴ τὴν ἀναδρομικὴ ἀπειροστικὴ προσέγγιση. Συμβολίζοντας μὲ $\mathsf{\Pi}_{96}$ τὴν περίμετρο τοῦ περιγεγραμμένου 96γώνου στὸν κύκλο μὲ διάμετρο **δ** καταλήγει

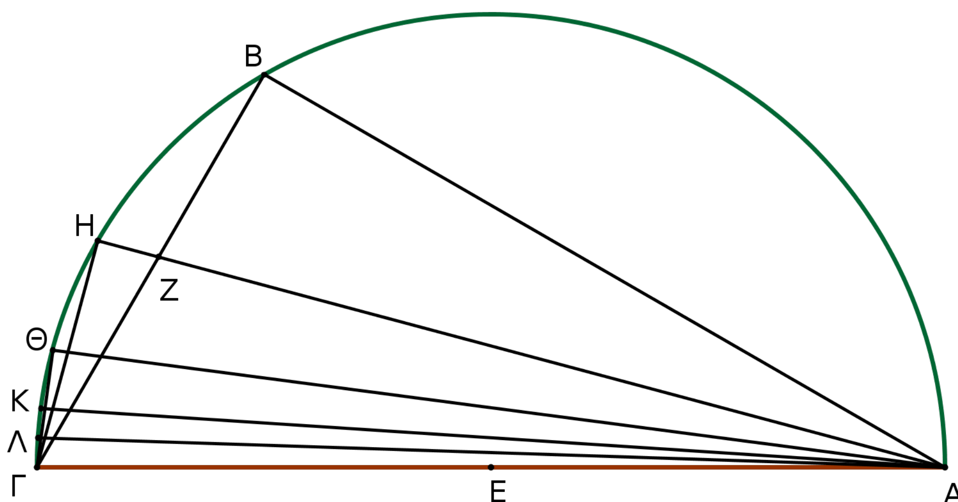
$$\frac{\mathsf{\Pi}_{96}}{\delta} = \frac{\textbf{περίμετρος 96γώνου}}{\textbf{διάμετρο κύκλου}} = \frac{96\cdot\mathsf{\Lambda M}}{\mathsf{A\Gamma}}$$

$$= \frac{96\cdot 2\cdot\mathsf{\Gamma\Lambda}}{2\cdot\mathsf{E\Gamma}} < \frac{96\cdot 153}{4673\frac{1}{2}} = \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7}$$

Μέρος 2ο.

Ὑπολογίζονται διαδοχικὰ οἱ λόγοι:

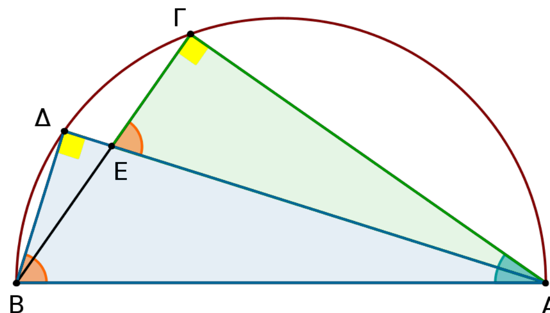
$$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{B\Gamma}}, \frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{B\Gamma}} \quad \frac{\mathbf{AH}}{\mathbf{H\Gamma}}, \frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{H\Gamma}} \quad \frac{\mathbf{A\Theta}}{\mathbf{\Theta\Gamma}}, \frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{\Theta\Gamma}} \quad \frac{\mathbf{AK}}{\mathbf{K\Gamma}}, \frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{K\Gamma}} \quad \frac{\mathbf{A\Lambda}}{\mathbf{\Lambda\Gamma}}, \frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{\Lambda\Gamma}}$$



Γιὰ νὰ συμπτύξουμε τὴν ἐμφάνιση τῆς ἀπόδειξης μπορούμε νὰ παραγοντοποιήσουμε ἀποδεικνύοντας πρῶτα τὸ ἀκόλουθο λῆμμα

Λ ῆ μ μ α 1: Ἔστω ἡμικύκλιο διαμέτρου ΒΑ, Γ τυχαῖο σημεῖο ἐπὶ τῆς περιφερείας του καὶ Δ τὸ σημεῖο τομῆς τῆς διχοτόμου τῆς ΒΑΓ γωνίας μὲ τὸ ἡμικύκλιο. Θὰ ἰσχύει τότε ὅτι

$$\frac{\mathbf{A\Delta}}{\mathbf{\Delta B}} = \frac{\mathbf{AB}+\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{B\Gamma}}$$



Ἀπόδειξη Ἀπὸ θεώρημα ἐσωτερικῶν διχοτόμων στὸ τρίγωνο **ΑΒΓ** λαμβάνουμε

$$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{A\Gamma}} = \frac{\mathbf{BE}}{\mathbf{\Gamma E}} \rightarrow \frac{\mathbf{AB}+\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{A\Gamma}} = \frac{\mathbf{BE}+\mathbf{\Gamma E}}{\mathbf{\Gamma E}} \rightarrow$$

$$\frac{\mathbf{AB}+\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{B\Gamma}} = \frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{\Gamma E}}$$

Τὰ τρίγωνα **ΑΓΕ** καὶ **ΑΔΒ** εἶναι ὅμοια ἐπειδὴ $\mathbf{B\Delta A} = \mathbf{B\Gamma A} = 1^{\mathsf{L}}$ καὶ ἡ **ΓΑΔ** γωνία ἴση μὲ τὴ **ΔΑΒ** διότι **ΑΔ** διχοτόμος. Ἐπομένως θὰ ἰσχύει

$$\frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{\Gamma E}} = \frac{\mathbf{A\Delta}}{\mathbf{\Delta B}}$$

ὁπότε τελικὰ τὸ ζητούμενο

$$\frac{\mathbf{A\Delta}}{\mathbf{\Delta B}} = \frac{\mathbf{AB}+\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{B\Gamma}}$$

Ἐπανερχόμαστε τώρα στὴν ἀνάλυση τῆς ἀπόδειξης τοῦ δεύτερου μέρους.
Βῆμα 1ο. Θεωροῦμε τὴν πλευρὰ **ΓΒ** ὡς πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου σὲ κύκλο μὲ ἀκτῖνα **ΕΓ** καὶ διάμετρο **δ**.

$$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{B\Gamma}} = \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$
$$\frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{B\Gamma}} = \frac{2}{1} = \frac{1560}{780}$$

Βῆμα 2ο. Θεωροῦμε τὴν πλευρὰ **ΓΗ** ὡς πλευρὰ κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἐγγεγραμμένου σὲ κύκλο μὲ ἀκτῖνα **ΕΓ** καὶ διάμετρο **δ**.

ἐπειδὴ ἀπὸ λήμμα 1

$$\frac{\mathbf{AH}}{\mathbf{H\Gamma}} = \frac{\mathbf{AB}+\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{B\Gamma}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{B\Gamma}} + \frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{B\Gamma}} < \frac{1351}{780} + \frac{1560}{780} = \frac{2911}{780}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\mathbf{A\Gamma}^2 = \mathbf{H\Gamma}^2 + \mathbf{AH}^2 \rightarrow$$
$$\frac{\mathbf{A\Gamma}^2}{\mathbf{H\Gamma}^2} = 1 + \frac{\mathbf{AH}^2}{\mathbf{H\Gamma}^2}$$
$$< \left(\frac{2911}{780}\right)^2 + 1 = \frac{9082321}{608400} \rightarrow$$
$$\frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{H\Gamma}} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

Βῆμα 3ο. Θεωροῦμε τὴν πλευρὰ **ΓΘ** ὡς πλευρὰ κανονικοῦ 24γώνου ἐγγεγραμμένου σὲ κύκλο μὲ ἀκτῖνα **ΕΓ** καὶ διάμετρο **δ**.

ἐπειδὴ ἀπὸ λήμμα 1

$$\frac{\mathbf{A\Theta}}{\mathbf{\Theta\Gamma}} = \frac{\mathbf{AH}+\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{H\Gamma}} = \frac{\mathbf{AH}}{\mathbf{H\Gamma}} + \frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{H\Gamma}} < \frac{2911}{780} + \frac{3013\frac{3}{4}}{780} = \frac{5924\frac{3}{4}}{780} = \frac{1823}{240}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\mathbf{A\Gamma}^2 = \mathbf{\Theta\Gamma}^2 + \mathbf{A\Theta}^2 \rightarrow$$
$$\frac{\mathbf{A\Gamma}^2}{\mathbf{\Theta\Gamma}^2} = 1 + \frac{\mathbf{A\Theta}^2}{\mathbf{\Theta\Gamma}^2}$$
$$< \left(\frac{1823}{240}\right)^2 + 1 = \frac{3380929}{57600} \rightarrow$$
$$\frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{\Theta\Gamma}} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$$

Βῆμα 4ο. Θεωροῦμε τὴν πλευρὰ **ΓΚ** ὡς πλευρὰ κανονικοῦ 48γώνου ἐγγεγραμμένου σὲ κύκλο μὲ ἀκτῖνα **ΕΓ** καὶ διάμετρο **δ**.

ἐπειδὴ ἀπὸ λήμμα 1

$$\frac{\mathbf{AK}}{\mathbf{K\Gamma}} = \frac{\mathbf{A\Theta}+\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{\Theta\Gamma}} = \frac{\mathbf{A\Theta}}{\mathbf{\Theta\Gamma}} + \frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{\Theta\Gamma}} < \frac{1823}{240} + \frac{1838\frac{9}{11}}{240} = \frac{3661\frac{9}{11}}{240} = \frac{1007}{66}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\mathbf{A\Gamma}^2 = \mathbf{K\Gamma}^2 + \mathbf{AK}^2 \rightarrow$$

$$\frac{\mathbf{A\Gamma}^2}{\mathbf{K\Gamma}^2} = 1 + \frac{\mathbf{AK}^2}{\mathbf{K\Gamma}^2}$$

$$< \left(\frac{1007}{66}\right)^2 + 1 = \frac{1018405}{4356} \rightarrow$$

$$\frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{K\Gamma}} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}$$

Βῆμα 5ο. Θεωροῦμε τὴν πλευρὰ **ΓΛ** ὡς πλευρὰ κανονικοῦ 96γώνου ἐγγεγραμμένου σὲ κύκλο μὲ ἀκτῖνα **ΕΓ** καὶ διάμετρο **δ**.

ἐπειδὴ ἀπὸ λήμμα 1

$$\frac{\mathbf{A\Lambda}}{\mathbf{\Lambda\Gamma}} = \frac{\mathbf{AK}+\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{K\Gamma}} = \frac{\mathbf{AK}}{\mathbf{K\Gamma}} + \frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{K\Gamma}} < \frac{1007}{66} + \frac{1009\frac{1}{6}}{66} = \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\mathbf{A\Gamma}^2 = \mathbf{\Lambda\Gamma}^2 + \mathbf{A\Lambda}^2 \rightarrow$$

$$\frac{\mathbf{A\Gamma}^2}{\mathbf{\Lambda\Gamma}^2} = 1 + \frac{\mathbf{A\Lambda}^2}{\mathbf{\Lambda\Gamma}^2}$$

$$< \left(\frac{2016\frac{1}{6}}{66}\right)^2 + 1 = \frac{4069284\frac{1}{36}}{4356} \rightarrow$$

$$\frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{\Lambda\Gamma}} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$$

Σταματώντας ἐδῶ τὴν ἀναδρομικὴ ἀπειροστικὴ προσέγγιση καὶ συμβολίζοντας μὲ $\boldsymbol{\pi}_{96}$ τὴν περίμετρο τοῦ ἐγγεγραμμένου 96γώνου στὸν κύκλο μὲ διάμετρο **δ** ὁ Ἀρχιμήδης καταλήγει

$$\frac{\boldsymbol{\pi}_{96}}{\boldsymbol{\delta}} = \frac{\textbf{περίμετρος 96γώνου}}{\textbf{διάμετρο κύκλου}} = \frac{96 \cdot \mathbf{\Lambda\Gamma}}{\mathbf{A\Gamma}}$$

$$> \frac{96 \cdot 66}{2017\frac{1}{4}} = \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}$$

Βιβλιογραφία

- J.L. Heiberg, Archimedis, Opera Omnia, Vol. I, B.G. Teubner, Lipsiae
- T.L. Heath, The Works Of Archimedes, Cambridge University Press, 1897
- Ε.Σ. Σταμάτη, Αρχιμήδους Κύκλου Μέτρησις, Ἀθῆναι 1950
- N.M. Beskin, Fascinating Fractions, MIR Publishers, Moscow
- Paulus Tannery, Diophanti Alexandrini, Opera Omnia, Volumen II, B.G. Teubner, Lipsiae
- H. Schöne, Heronis Alexandrini, Rationes Dimetiendi et Commentatio Dioptrica, Vol. III, B.G. Teubner, Lipsiae
- Fridericus Hultsch, Pappi Alexandrini Collectionis, Vol. I, Berolini 1876-8
- E. B. Davies, (Paper) Archimedes' calculations of square roots, Jan 2011.


ISBN 978-1-387-86283-2
90000
9 781387 862832